

## 時間周波数表示

### Time Frequency Representations

片岡龍峰

#### 要旨：

時系列の特徴を周波数空間で捉える時間周波数表示は研究手法として有用である。本稿では、Fourier 変換、Wavelet 変換、Hilbert 変換について解説し、これらに応用した S 変換と Hilbert-Huang 変換を用いた非定常時系列の解析例を紹介する。

#### 1. Fourier 変換

時系列  $h$  と、その Fourier 変換  $F$  の関係式。

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{i2\pi ft} df \quad (1.2)$$

Fourier 変換に応用した時間周波数表示が Gabor 変換。

$$\Gamma(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t-\tau)e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.3)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (1.4)$$

調べたい周波数に合わせてガウシアン幅  $\sigma$  を固定し（不満 1）、Fourier スペクトルをタイミング  $\tau$  の関数にして表現する。

#### 2. Wavelet 変換

時系列  $h$  の Wavelet 変換  $W$ 。

$$W(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)w(t-\tau, s)dt \quad (2.1)$$

$w(t-\tau, s)$  は wavelet をタイミング平行移動およびスケール変換したもの。スケール  $s$  を導入したことで wavelet の幅、つまり解像度が可変となった（不満 1 の解消）。どのスケールの wavelet がどのタイミングで強いかを表現するわけで、周波数は陽に現れない（不満 2）。

### 3. S 変換

時系列  $h$  の  $S$  変換  $S$ 。

$$S(f, \tau, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t - \tau, \sigma)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

式(1.3)と見比べると、 $\sigma = \text{const.}$ とした Gabor 変換からの自然な拡張になっている（不満 1 の解消）。さらに、ガウシアン幅として周波数の逆数を選ぶ（不満 2 の解消）。

$$\sigma(f) = \frac{1}{|f|} \quad (3.2)$$

$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t - \tau, f)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.3)$$

以下は実際の計算を楽にするための式変形である。畳み込み積分の形にするため、ガウシアン以外を  $p$  と置く。

$$p(t, f) = h(t)e^{-i2\pi ft} \quad (3.4)$$

$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, f)g(t - \tau, f) dt \quad (3.5)$$

畳み込み積分は Fourier 空間では積。  $S$  の Fourier 変換  $B$  を書き下す。

$$B(f, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f, \tau)e^{-i2\pi\alpha\tau} d\tau \quad (3.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t, f)g(\tau - t, f)e^{-i2\pi\alpha\tau} d\tau dt \quad (3.7)$$

$$= P(\alpha, f)G(\alpha, f) \quad (3.8)$$

$P$  は  $p$  の Fourier 変換であり、 $G(\alpha, f) = e^{-2\pi^2\alpha^2/f^2}$  は  $g$  の Fourier 変換である。

$$P(\alpha, f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, f)e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, f)e^{-i2\pi(\alpha+f)t} dt = F(\alpha + f) \quad (3.9)$$

このようにして、 $S$  変換は Fourier 変換を繰り返し用いることで楽に計算できる。

$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \alpha)e^{i2\pi\alpha\tau} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + f)e^{-2\pi^2\alpha^2/f^2} e^{i2\pi\alpha\tau} d\alpha \quad (3.10)$$

$S$  変換を時間積分すると Fourier 変換が得られるため、逆変換もできる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha + f)e^{-2\pi^2\alpha^2/f^2} e^{i2\pi\alpha\tau} d\alpha d\tau \quad (3.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha + f)e^{-2\pi^2\alpha^2/f^2} \delta(\alpha) d\alpha = H(f) \quad (3.12)$$

#### 4. Hilbert 変換

Fourier 変換とその自然な拡張 (Wavelet 変換、 $S$  変換) では、時間変化しない周期の存在が前提である (不満 3)。ばねの強制振動のように一周期の間にその周期が周期的な擾乱を受けると解釈すべき物理現象の表現には、Hilbert 変換を用いた表現がより適切である。

実数時系列  $x$  の Hilbert 変換  $H$  は次のように定義される。

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (4.1)$$

$\text{P}$  はコーシーの主値。正の周波数成分は 90 度位相を遅らせ、負の周波数成分は 90 度位相を進めるという操作を、畳み込み積分の形で表したものが Hilbert 変換である。いま、負の周波数スペクトルがゼロの複素数時系列  $z$  とその Fourier 変換  $Z$  を考える。つまり

$$Z(f) = F(f) + \text{sgn}(f)F(f) \quad (4.2)$$

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } f > 0 \\ 0 & \text{for } f = 0 \\ -1 & \text{for } f < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (4.4)$$

(5.2)と(5.4)を見比べると、 $x$  と  $y$  は  $-i \text{sgn}(f)$  が Fourier 空間で演算される関係にあり、 $y$  は  $x$  の Hilbert 変換そのものであることがわかる。このような複素数時系列  $z$  を解析信号(analytic signal)と呼び、次のように書き直す。

$$z(t) = a(t)e^{i\theta(t)}, \quad a(t) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta(t) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.5)$$

$a$  は瞬間振幅、 $\theta$  は位相。瞬間角周波数  $\omega$  は  $\theta$  の時間微分で定義される。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.6)$$

こうして速い周期変化を表現すると (不満 3 の解消)、 $S$  変換の式(3.2)のような時間分解能と周波数分解能のトレードオフの関係性も消える。

#### 5. Hilbert-Huang 変換

任意の実数時系列が、解析信号表示に適しているわけではない。ここでは、前処理として有用な empirical mode decomposition (EMD) という手法を言葉で説明する。(4.5)式から、正負対称な包絡線が定義できる滑らかな波形では、瞬間角周波数が物理的な意味を持つと期待できる。そこで、実数時系列を、以下の条件を満たす複数の intrinsic mode function (IMF) に分解する。

- ・ 極大値、極小値、ゼロ通過点の個数が一致するか 1 だけ異なる。
- ・ 極大値を通る包絡線 **A** と極小値を通る包絡線 **B** の和が至るところでゼロ。

EMD では、sifting (スプライン補間で包絡線 A, B を書く。A-B をデータから引く。) を繰り返し、収束した時点で第 1 IMF を決定する。元データから第 1 IMF を差し引いた後、同様の手順で、第 2、第 3、... の IMF を sifting できなくなるまで抽出する。こうして分解された各 IMF を解析信号として瞬間角周波数を扱う解析手法をまとめて、Hilbert-Huang 変換と呼ぶ。

## 6. 解析例

周波数が時間と共に上昇する Chirp 信号を解析する。

$$h(t) = \sin(2\pi(f_0 + kt)t) \quad (6.1)$$

この Chirp 信号を 512 点で構成し (図 1 上)、単に Fourier 変換すると、広い周波数範囲でスペクトル強度が上昇する (図 1 下)。ナイキスト波数 256 でスペクトルが対称形なのは、入力信号が実数のためである。ナイキスト波数 256 より大きい波数は、負の周波数を表す。

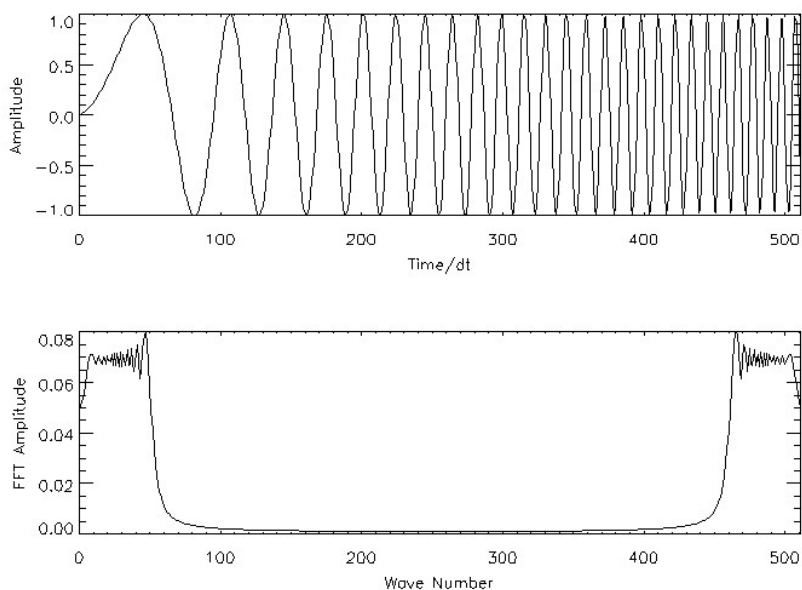


図 1 : Chirp 信号 (上) と、その Fourier 波数スペクトル (下)。

このように、実数時系列の場合、スペクトル情報はナイキスト波数までで十分である。Hilbert 変換から解析信号を構成し (図 2 上)、それを Fourier 変換すると、スペクトル強度は正の周波数のみに集中し、負の周波数はゼロとなる (図 2 下)。

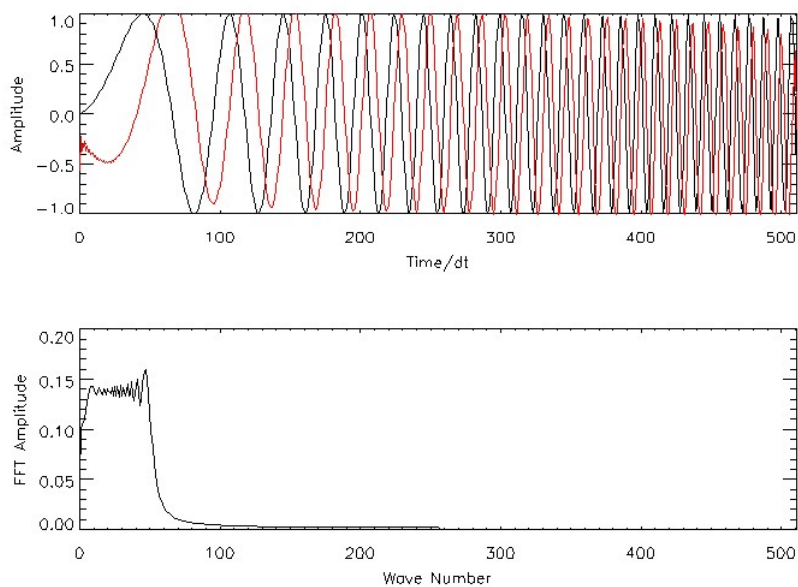


図 2 : Chirp 信号 (上) と、その Fourier 波数スペクトル (下)。赤は虚部。

さらに S 変換を行うと、時間変化する周波数がはっきりと見て取れる (図 3 左)。また、S 変換を時間平均したもの (図 3 右・青線) は Fourier 変換と一致している (図 3 右・黒線)。

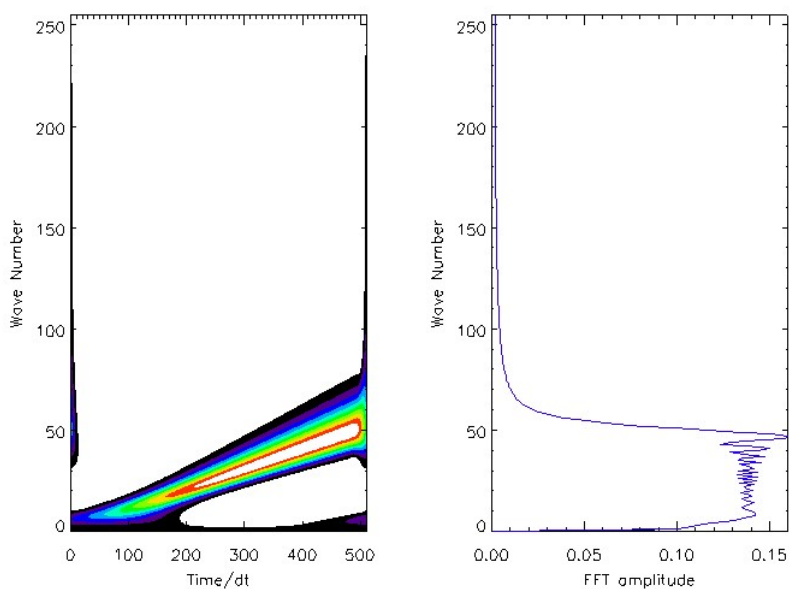


図 3 : S 変換スペクトル (左) と Fourier 変換スペクトル (右)。

EMD により、この Chirp 信号は、速い変動から順に三つの波形に分かれてしまう (図 4)。

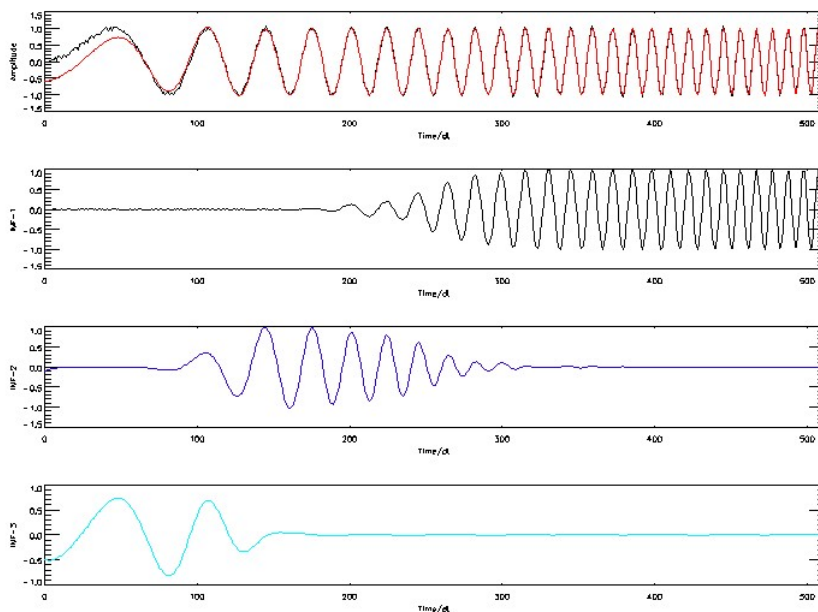


図 4 : Chirp 信号、第 1、第 2、第 3 IMF。赤線は第 1、第 2、第 3 IMF の和。

Hilbert-Huang 変換による瞬間周波数は一直線に正確に求まる (図 5 右、それぞれの色で、IMF 振幅が十分大きい時間帯の瞬間周波数を見る)。S 変換と比べると、ちょうど骨組みのように見えるため、Hilbert-Huang 変換スペクトルは Skelton スペクトルとも呼ばれる。

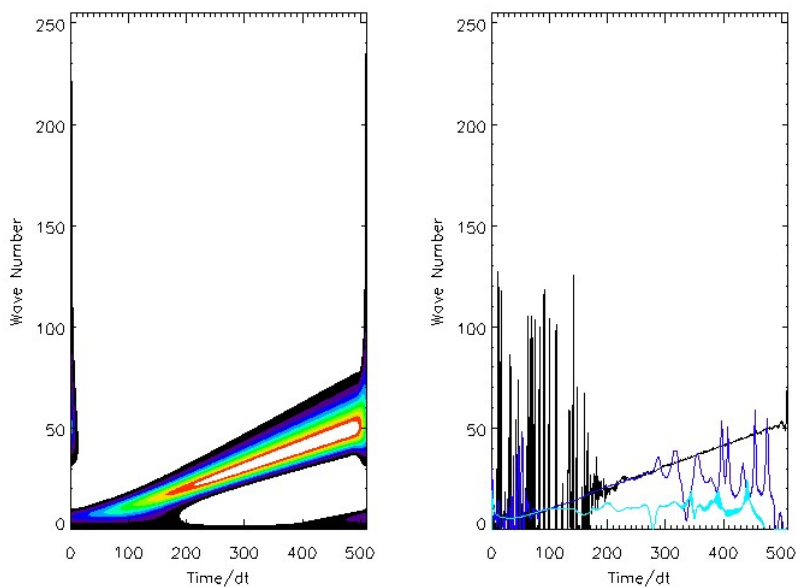


図 5 : S 変換スペクトル (左) と Hilbert-Huang 変換スペクトル (右)

次のような非線形信号（図 6 上）は、Fourier 変換するとハーモニクスになる（図 6 下）。

$$h(t) = \sin(4\pi f_0 t + \sin(2\pi f_0 t)) \tag{6.2}$$

S 変換でも同様にハーモニクス的なスペクトルになってしまう（図 7 左）。これでは、時系列の特徴を時間周波数表示するのに、ほぼ失敗した感がある。

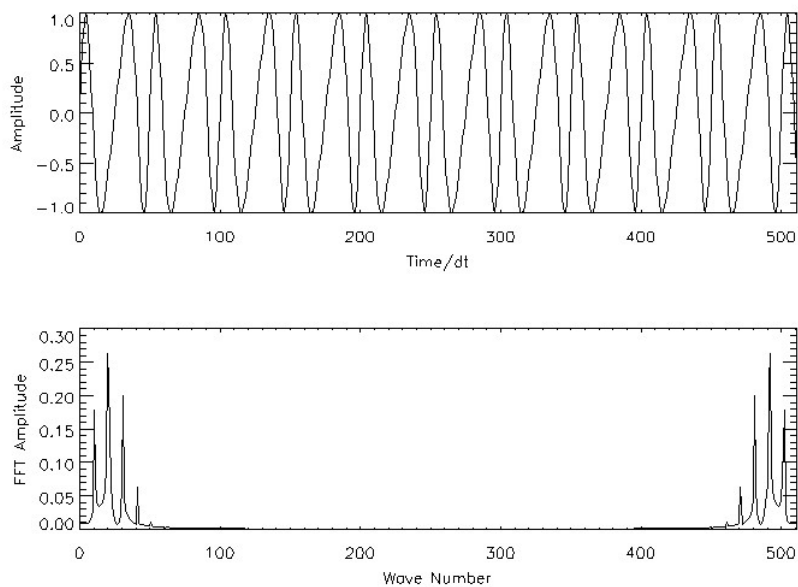


図 6 : とがったサイン波（上）と、その Fourier 波数スペクトル（下）。

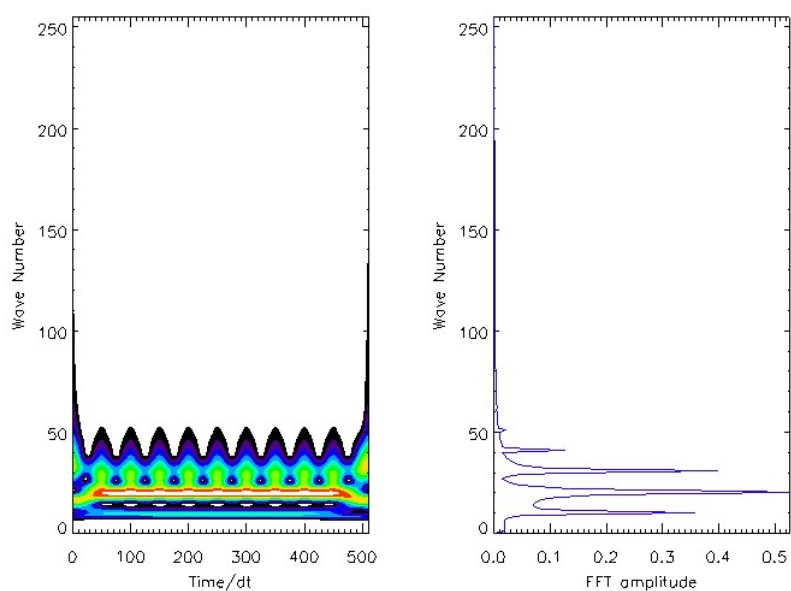


図 7 : S 変換スペクトル（左）と Fourier 変換スペクトル（右）。

興味深いことに、EMD を適用した結果、第 2 IMF に、ほぼすべての特徴が抽出された (図 8)。Hilbert-Huang 変換により求めた第 2 IMF の瞬間周波数 (図 9 青線) は、周期的に擾乱を受けており、より直感的に時間周波数表示していることがわかる。

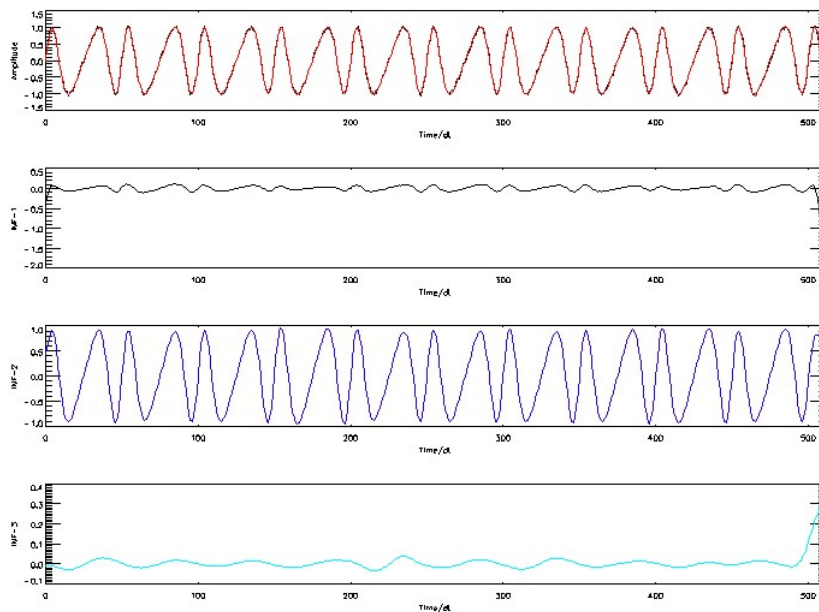


図 8 : 入力信号、第 1、第 2、第 3 IMF。赤線は第 1、第 2、第 3 IMF の和

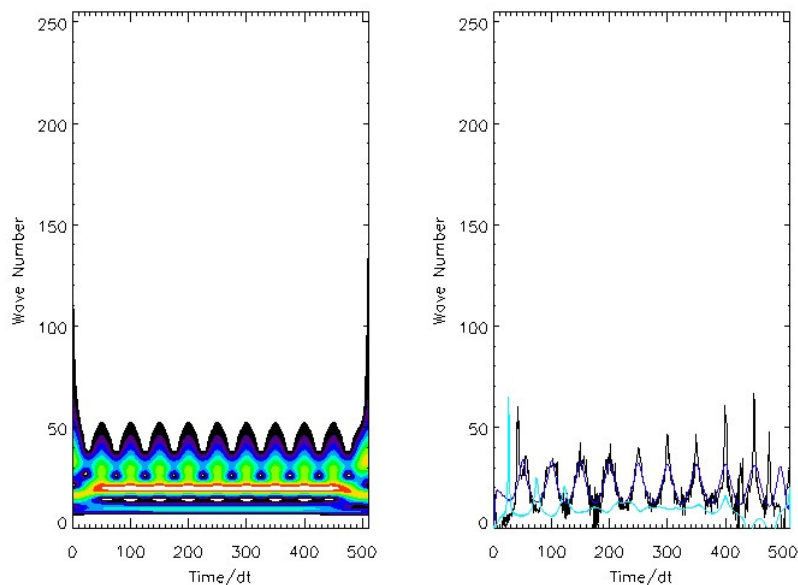


図 9 : S 変換スペクトル (左) と Hilbert-Huang 変換スペクトル (右)



## 7. まとめ

定常線形の Fourier 解析[1]を高度に応用した、非定常線形の S 変換[2]と非定常非線形の Hilbert-Huang 変換[3]による時間周波数表示について解説した。S 変換と Hilbert-Huang 変換どちらか片方では時間周波数表示として不完全だが、両方を用いることで、非定常時系列の特徴を目で注意深く見た以上に知ることができる。

最後に、本稿では紹介していないが、S 変換の絶対位相と解析信号との関係性、負の周波数の使い方、S 変換や Wavelet 変換によるノイズ解析は、Fourier 変換の基本性質から理解する上で重要である。また、実際に S 変換と Hilbert-Huang 変換のプログラム実装から、それぞれの本質的な問題点を幾つも実感することができる。S 変換の直交基底[4]とアンサンブル EMD[5]などを辿れば、その一端を垣間見ることができる。

### 参考文献：

- [1] 日野幹雄 (1977), スペクトル解析, 朝倉書店.
- [2] Stockwell, R. G., L. Mansinha, and R. P. Lowe (1996), Localization of the complex spectrum: The S-transform, IEEE Trans. Signal Processing, 44, 998-1001.
- [3] Huang, N. E., et al. (1998), The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 454, 903-995.
- [4] Stockwell, R. G. (2007), A basis for efficient representation of the S-transform, Digital Signal Processing, 17, 1, 371-393.
- [5] Wu, Z., and N. E. Huang (2009), Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method, Advances in Adaptive Data Analysis, 1, 1, 1-41.